УДК 517.977.52

VIII. ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

А. А. Милютин

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Постановка вопроса

Здесь $n \geqslant 1$, $q = (q_0, \dots, q_{n\ 1}) \in \mathbf{R}^n$, $T > 0$. Для заданных q и T рассматривается задача

$$J = \int_0^T (x + \frac{|u|^p}{p})\, dt \to \min, \tag{1}$$

$$x^{(k)}(0) = q_k,\ (k = 0, \dots, n\quad 1), \quad x^{(k)} = u, \quad x \geqslant 0.$$

Задачу (1) мы называем (q, T)-задачей. Здесь $p > 1$, $x(t)$ — скалярная функция.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 97-01-00135 и № 96-15-96072.

Если (q,T)-задача имеет хотя бы одну допустимую траекторию, то она имеет решение, единственность которого вытекает из соображений выпуклости.

Легко видеть, что множество допустимых траекторий (q,T)-задачи будет непустым тогда и только тогда, когда $q \in Q$, где

$$Q = \bigcup_{0}^{n-1} Q_k \bigcup 0; \quad Q_k = \{q \,| q_k > 0,\ q_{k'} = 0\ \forall k' < k\}.$$

Пусть $x_*(t)$, $u_*(t)$ — решение некоторой (q,T)-задачи. Тогда для него выполнено уравнение Эйлера [2]

$$-\int_0^T (\bar{x} + \operatorname{sign} u_* \cdot |u_*|^{p-1}\bar{u})\,dt - \int_0^T \psi(t)(\bar{x}^{(n)} - \bar{u})\,dt + \\ + \sum_0^{n-1} \beta_k \bar{x}^{(k)}(0) + \int_{[0,T]} \bar{x}\,d\mu = 0, \quad (2)$$

где $d\mu \geqslant 0$; $x_*(t)d\mu = 0$. Функции $\bar{x}$, $\bar{u}$ произвольны. Для определенности, не ограничивая общности, будем считать, что

$$\int_{[0]} d\mu = 0.$$

Любое решение (2) является решением (q,T)-задачи. Уравнение Эйлера эквивалентно следующему принципу максимума [2]:

$$x^{(n)} = u;\ \ \psi^{(n)} = (-1)^{n-1}\left(1 - \frac{d\mu}{dt}\right);\ \ x^{(k)}(0) = q_k; \\ \psi^{(k)}(T) = 0,\ \ k = 0, \ldots, n-1; \qquad (3) \\ x \geqslant 0;\ \ \psi = \operatorname{sign} u \cdot |u|^{p-1};\ \ d\mu \geqslant 0;\quad x\,d\mu = 0;\ \int_{[0]} d\mu = 0.$$

В настоящей работе мы доказываем, что для любого $q \in Q$ существует $T(q)$ такое, что при $T > T(q)$ решение (q,T)-задачи не зависит от T, и исследуем поведение решения в окрестности $T(q)$.

§ 2. Неравенства на вариации

Для $\nu > 0$ положим

$$e_\nu(v) = \operatorname{sign} v \cdot |v|^\nu.$$

Пусть $x(t)$ — функция, определенная и непрерывно дифференцируемая на отрезке $[t_0, t_1]$. Для $\mathcal{E} \subset [t_0, t_1]$ определим

$$V_\nu(x(\cdot); \mathcal{E}) = \operatorname*{var}_{\mathcal{E}} e_\nu(x(t)).$$

Имеет место

Лемма. *Для любого* $m > 0$ *верно неравенство*

$$V_{\frac{1}{m+1}}(x(\cdot); [t_0, t_1]) \leqslant 2^{\frac{m}{m+1}} \Big(t_1 - t_0 + \min_{[t_0, t_1]} |\dot{x}(t)| + V_{\frac{1}{m}}(\dot{x}(\cdot); [t_0, t_1]) \Big).$$

Доказательство. Допустим сначала, что $\dot{x}(t_0) = 0$. Положим

$$\mathcal{E}_0 = \{t | x(t) = 0\}, \quad \mathcal{E}_1 = \{t | \dot{x}(t) = 0\},$$

$\mathcal{D}_i \,(i = 0, 1)$ — множество смежных интервалов $\mathcal{E}_i$ на $[t_0, t_1]$. Очевидно, что

$$V_{\frac{1}{m+1}}(x(\cdot); [t_0, t_1]) = \sum_{\Delta \in \mathcal{D}_0} V_{\frac{1}{m+1}}(x(\cdot); \Delta) =$$

$$= \sum_{\Delta \in \mathcal{D}_0} \frac{1}{m+1} \int_\Delta \frac{|\dot{x}|}{|x|^{\frac{m}{m+1}}} \, dt = \sum_{\Delta \in \mathcal{D}_0} \int_{\Delta \setminus \mathcal{E}_1} \frac{1}{m+1} \frac{|\dot{x}|}{|x|^{\frac{m}{m+1}}} \, dt.$$

Отсюда следует

$$V_{\frac{1}{m+1}}(x(\cdot); [t_0, t_1]) = \sum_{\Delta \in \mathcal{D}_1} V_{\frac{1}{m+1}}(x(\cdot); \Delta). \tag{1}$$

Пусть $\Delta = (t', t'') \in \mathcal{D}_1$. Тогда из $\dot{x}(t_0) = 0$ следует $\dot{x}(t') = 0$. Будем далее считать для определенности, что $\dot{x} > 0 \,|\, \Delta$. Положим

$$\bar{x} = x(t'') - x(t'), \qquad \bar{p} = \frac{x(t'') - x(t')}{t'' - t'}.$$

Имеем

$$\bar{x}^{\frac{1}{m+1}} \leqslant t'' - t' + \bar{p}^{\frac{1}{m}},$$

$$V_{\frac{1}{m+1}}(x(\cdot); \Delta) \leqslant 2^{\frac{m}{m+1}} \cdot \bar{x}^{\frac{1}{m+1}}, \tag{2}$$

$$V_{\frac{1}{m}}(\dot{x}(\cdot); \Delta) \geqslant \bar{p}^{\frac{1}{m}}.$$

Из неравенств (2) следует

$$V_{\frac{1}{m+1}}(x(\cdot); \Delta) \leqslant 2^{\frac{m}{m+1}} \Big(t'' - t' + V_{\frac{1}{m}}(\dot{x}(\cdot); \Delta) \Big). \tag{3}$$

К этому же неравенству мы придем, если будем считать, что $\dot{x} < 0 \,|\, \Delta$. Тогда из (1) и (3) получим

$$V_{\frac{1}{m+1}}(x(\cdot); [t_0, t_1]) \leqslant 2^{\frac{m}{m+1}} \Big(t_1 - t_0 + V_{\frac{1}{m}}(\dot{x}(\cdot); [t_0, t_1]) \Big).$$

Из этого неравенства легко следует утверждение леммы.

§ 3. Теорема о посадке

Фиксируем произвольно $q \in Q \setminus \{0\}$. Через $x(t,T)$ обозначим решение (q,T)-задачи. Положим

$$\mathcal{E}_0(T) = \{t \mid x(t,T) = 0\}.$$

Нами будет доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Существует $T(q) > 0$ такое, что*

1) $x^{(k)}(T(q),T(q)) = 0$, $k = 0,\dots,n-1$,

2) $\mathcal{E}_0(T(q))$ *не имеет предельных точек на* $[0,T(q))$.

Эту теорему мы называем теоремой о посадке. Из нее сразу следует, что для $T > T(q)$ справедливо

$$x(t,T) = \begin{cases} x(t,T(q), & t \leqslant T(q), \\ 0, & t > T(q). \end{cases} \tag{1}$$

Доказательству теоремы о посадке посвящены следующие три параграфа.

§ 4. Предварительные оценки

Предложение 1. *Существует $C_0 > 0$ такое, что*

$$\max_{[0,T]} |x^{(k)}(t,T)| \leqslant C_0 \quad \forall T \geqslant 1,\ k = 0,\dots,n-1.$$

Доказательство. Выберем функцию $\hat{x}(t)$ на полуоси $t \geqslant 0$, удовлетворяющую условиям:

$$\hat{x} \geqslant 0 \,|[0,\infty); \quad \hat{x}^{(k)}(0) = q_k,\ k = 0,\dots,n-1;$$

$$\hat{J} = \int\limits_0^\infty \Bigl(\hat{x}(t) + \frac{1}{p}|\hat{u}(t)|^p\Bigr)\,dt < \infty, \quad \hat{u}(t) = \hat{x}^{(n)}(t).$$

Тогда

$$\int\limits_0^T \Bigl(x(t,T) + \frac{1}{p}|u(t,T)|^p\Bigr)\,dt \leqslant \hat{J} \quad \forall T. \tag{1}$$

Пусть $T \geqslant 1$, $t_0 \in [0, T-1]$. На $[t_0, t_0+1]$ представим $x(t,T)$ в виде: $x(t,T) = P(t;t_0,T) + r(t;t_0,T)$, где $P(t;\cdot)$ — полином по t степени, не выше $n-1$, а r имеет вид:

$$r(t;\cdot) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{t_0}^t (t-\tau)^{n-1} u(\tau,T)\,d\tau.$$

Из (1) следует оценка:

$$\max_{k=0,\dots,n-1} \max_{[t_0,t_0+1]} |r^{(k)}(t;\cdot)| \leqslant \text{const}, \qquad (2)$$

причем постоянная не зависит от t_0 и T. Отсюда и из (1) следует, что

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+1} |P(t;\cdot)|\, dt \leqslant \text{const}, \qquad (3)$$

где постоянная также не зависит от t_0 и T. Утверждение предложения легко следует из (2) и (3).

В дальнейшем через $\psi(t,T)$, $d\mu(T)$ будем обозначать компоненты (3.1) для решения (q,T)-задачи. Положим

$$\lambda(T) = \int\limits_{[T/2,T]} d\mu(T).$$

Предложение 2.

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{\lambda(T)}{T} < \infty.$$

Доказательство. Воспользуемся уравнением Эйлера (2.1). Подставляя в уравнение Эйлера $\bar{x}(t) = \frac{1}{n!}t^n$; $\bar{u}(t) = 1$, получаем

$$\int_{[0,T]} \frac{1}{n!}\, t^n\, d\mu(T) = \int_0^T \left(\frac{1}{n!}\, t^n + \operatorname{sign} u(t,T)\cdot |u(t,T)|^{p-1}\right) dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(n+1)!} T^{n+1} + \left(\int_0^T |u(t,T)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{q}} T^{\frac{1}{p}},$$

где $q = \frac{p}{p-1}$. Отсюда и из (1) имеем

$$\frac{1}{n!}\frac{T^n}{2^n}\, \lambda(T) \leqslant \frac{1}{(n+1)!} T^{n+1} + (p\hat{J})^{\frac{1}{q}}\, T^{\frac{1}{p}}.$$

Откуда и следует утверждение предложения.

Из предложения 2 следует

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\Big(V_1(\psi^{(n-1)}(\cdot,T);[T/2,T])\Big) < \infty.$$

Из этого неравенства и из леммы 1 § 2 имеем, в силу того, что $\psi^{(k)}(T,T) = 0$, $k = 0,\dots,n-2$; $\psi^{(n-1)}_{\text{пр}}(T,T) = 0$, неравенство

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\Big(V_{\frac{1}{k}}(\psi^{(n-k)}(\cdot,T);[T/2,T])\Big) < \infty,\ k = 1,\dots,n. \qquad (4)$$

Из уравнений (3.1) следует
$$e_{\frac{1}{n}}(\psi(t,T)) = e_{\frac{p-1}{n}}(u(t,T)).$$
Тогда из (4), полагая $k = n$, получим
$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\Big(V_{\frac{p-1}{n}}(u(\cdot,T);[T/2,T])\Big) < \infty. \tag{5}$$
Заметим, что $u(T,T) = 0$ в силу (3.1). Тогда из леммы 1 § 2 и предложения 1 имеем
$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\Big(V_{\frac{1}{m+k}}(x^{(n-k)}(\cdot,T);[T/2,T])\Big) < \infty, \tag{6}$$
$$m = \frac{n}{p-1}; \quad k = 0,\dots,n.$$
Неравенства (4) и (6) являются основным результатом настоящего параграфа.

§ 5. Неравенства на производные

Для $\varepsilon > 0$ положим
$$\mathcal{E}_1(\varepsilon,T) = \Big\{t \mid t\in[T/2,T];\ |\psi^{(n-k)}(t,T)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\Big|\psi^{(n-k-1)}(t,T)\Big|^{\frac{k}{k+1}}\Big\},$$
$$\mathcal{E}_2(\varepsilon,T) = \Big\{t \mid t\in[T/2,T];\ |x^{(n-k)}(t,T)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\Big|x^{(n-k-1)}(t,T)\Big|^{\frac{m+k}{m+k+1}}\Big\},$$
$$k = 1,\dots,n-1;$$
$$\mathcal{E}(\varepsilon,T) = \mathcal{E}_1(\varepsilon,T)\cap\mathcal{E}_2(\varepsilon,T).$$
Содержанием настоящего параграфа является

Предложение 1. *Для любого $\theta\in(0,1)$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что*
$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\operatorname{mes}\mathcal{E}(\varepsilon,T) > \frac{1}{2}\theta.$$

Доказательство. Для $\varepsilon > 0$, $k = 1,\dots,n-1$, введем множество
$$\mathcal{E}_1'(\varepsilon,k,T) = \Big\{t \mid t\in[T/2,T];\ |\psi^{(n-k)}(t,T)| > \frac{1}{\varepsilon}\Big|\psi^{(n-k-1)}(t,T)\Big|^{\frac{k}{k+1}}\Big\}.$$
Пусть ε, k, T таковы, что $\operatorname{mes}\mathcal{E}_1'(\varepsilon,k,T) > 0$. Ясно, что почти всюду на $\mathcal{E}_1'(\varepsilon,k,T)$ выполнено условие: $\psi^{(n-k-1)}(t,T)\neq 0$. Положим
$$Z = \int\limits_{\mathcal{E}_1'(\varepsilon,k,T)} \Big(\big|\psi^{(n-k)}(t,T)\big|\,\big|\psi^{(n-k-1)}(t,T)\big|^{k/k+1}\Big)\,dt.$$

Очевидно, что $Z > \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{mes} \mathcal{E}_1'(\varepsilon, k, T)$. С другой стороны, из интегральной формулы для вариации имеем

$$Z \leqslant (k+1) V_{\frac{1}{k+1}}(\psi^{(n-k-1)}(\cdot, T); [T/2, T]).$$

Из (4.4) следует, что существует C_1 такое, что $Z \leqslant C_1(k+1)T$ для всех достаточно больших T.

Из неравенств для Z получаем

$$\operatorname{mes} \mathcal{E}_1'(\varepsilon, k, T) < C_1(k+1)\varepsilon T. \tag{1}$$

Неравенство (1) справедливо для всех достаточно больших T. Положим далее

$$\mathcal{E}_2'(\varepsilon, k, T) = \Big\{ t \mid t \in [T/2, T]; |x^{(n-k)}(t, T)| > \\ > \frac{1}{\varepsilon} \Big| x^{(n-k-1)}(t, T) \Big|^{\frac{m+k}{m+k+1}} \Big\}.$$

Аналогично рассуждая, опираясь на (4.4), получим, что для всех достаточно больших T имеет место оценка

$$\operatorname{mes} \mathcal{E}_2'(\varepsilon, k, T) < C_2(m+k+1)\,\varepsilon T. \tag{2}$$

Из (1) и (2) легко следует утверждение предложения.

Выберем произвольно $\theta_0 \in (0,1)$ и возьмем $\varepsilon_0 > 0$ таким, чтобы имело место неравенство

$$\operatorname{mes} \mathcal{E}(\varepsilon_0, T) \geqslant \frac{\theta_0}{2} T \tag{3}$$

для всех достаточно больших T.

Следствием предложения 1 при $\varepsilon_0 < 1$ являются неравенства, верные на $\mathcal{E}(\varepsilon_0, T)$ для любого T:

$$\begin{gathered} \left|\psi^{(n-k)}(t, T)\right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0^n} |\psi(t, T)|^{\frac{k}{n}}, \\ \left|x^{(n-k)}(t, T)\right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0^n} |x(t, T)|^{\frac{m+k}{m+k+1}}, \\ k = 1, \dots, n. \end{gathered} \tag{4}$$

§ 6. Завершение доказательства теоремы о посадке

Положим

$$S(t, T) = (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{(k)}(t, T)\, \psi^{(n-k-1)}(t, T). \tag{1}$$

Так как согласно (3.1), $x(t,T)d\mu = 0$, то $S(t,T)$ непрерывна на $[0,T]$, непрерывно дифференцируема на $[0,T]$ при $n > 1$, липшицева на $[0,T]$ при $n = 1$. Легко видеть,что

$$\frac{dS}{dt} = x(t,T) + u(t,T)\psi(t,T) = x(t,T) + |\psi(t,T)|^q, \quad q = \frac{p}{p-1}. \tag{2}$$

Из граничных условий (3.1) имеем

$$S(T,T) = 0. \tag{3}$$

Так как $S(t,T)$ — неубывающая функция, то множество ее нулей является отрезком (может быть точкой), причем T является его правым концом.

Обозначим этот отрезок через $\Delta(T)$. Через $|\Delta(T)|$ обозначим длину отрезка $\Delta(T)$.

Предложение 1. *При всех достаточно больших T справедливо неравенство $|\Delta(T)| > 0$.*

Доказательство. Согласно (4.5) на $\mathcal{E}(\varepsilon_0, T)$ имеет место оценка

$$|S(t,T)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} (x(t,T))^{\frac{m+n-k}{m+n}} \cdot |\psi(t,T)|^{\frac{k+1}{n}},$$

но для любого k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ имеем

$$(x(t,T))^{\frac{m+n-k}{m+n}} \cdot |\psi(t,T)|^{\frac{k+1}{n}} \leqslant \left(\frac{dS}{dt}\right)^{\frac{m+n-k}{m+n} + \frac{k+1}{nq}} = \left(\frac{dS}{dt}\right)^{1+\frac{1}{nq}}.$$

Из двух данных оценок следует

$$|S(t,T)| \leqslant \frac{n}{\varepsilon_0^{2n}} \left(\frac{dS}{dt}\right)^{1+\frac{1}{nq}}. \tag{4}$$

Напомним, что (4) имеет место на $\mathcal{E}(\varepsilon_0, T)$ для любого T.

Допустим, что $|\Delta(T)| = 0$. Тогда из монотонности S и (4) вытекает, что

$$|S(T/2,T)| \geqslant n(1+nq)^{1+\frac{1}{nq}} \frac{1}{\varepsilon_0^{2n}} \cdot (\operatorname{mes} \mathcal{E}(\varepsilon_0, T))^{1+nq}. \tag{5}$$

Пусть T настолько велико, что имеет место (3.5). Тогда из (5) получим

$$|S(T/2,T)| \geqslant \text{const} \left(\frac{\theta_0}{2}\right)^{(1+nq)} \cdot T^{1+nq}, \tag{6}$$

где постоянная зависит только от ε_0.

С другой стороны, из (4.4) следует существование постоянной C, не зависящей от T, такой, что $|\psi^{(n-k)}(T/2,T)| \leqslant CT^k$, $k = 1,\dots,n$, для всех достаточно больших T. Тогда из предложения 1 § 4 получим

$$|S(T/2,T)| \leqslant C_0 C_1 \sum_{k=1}^{n} T^k.$$

При больших T это неравенство противоречит неравенству (6). Тем самым предложение доказано.

Пусть T таково, что $|\Delta(T)| > 0$. Так как $S(t,T) = 0\,|\Delta(T)$, то из (2.6) следует $x(t,T) = 0\,|\Delta(T)$. Пусть $T(q)$ — левый конец $\Delta(T)$. Тогда очевидно

$$x(t,T') = x(t,T)\,|\,[T',T] \tag{7}$$

для любого $T' \in [T(q),T]$,

$$x(t,T'') = \begin{cases} x(t,T), & t \in [0,T], \\ 0, & t \in [T,T''], \end{cases} \tag{8}$$

для любого $T'' \geqslant T$.

Рассмотрим далее множество $\mathcal{E}_0(T(q))$ (см. § 3). С одной стороны, $|\Delta(T(q))| = 0$ и, следовательно, $S(t,T(q)) \neq 0 \mid [0,T(q))$. С другой стороны, в каждой предельной на $[0,T(q))$ точке $\mathcal{E}_0(T(q))$ выполняется $S(t,T(q)) = 0$. Следовательно, $\mathcal{E}_0(T(q))$ не имеет предельных точек на $[0,T(q))$. Отсюда и из (7) и (8) легко следует теорема.

§ 7. Характеристики посадки

В предыдущем параграфе мы доказали, что для $q \neq 0$ множество $\mathcal{E}_0(T(q))$ не более, чем открыто, и если счетно, то $T(q)$ является ее единственной предельной точкой.

Пусть $\mathcal{E}_+(T(q)) \subset \mathcal{E}_0(T(q))$ — множество тех t, для которых скачок меры $d\mu(T(q))$ отличен от нуля.

Назовем посадку простой, если $\mathcal{E}_+(T(q))$ не более чем конечно. В противном случае мы будем говорить о непростой посадке. В настоящем параграфе мы опишем простую посадку, пользуясь уравнениями (3.1).

В случае простой посадки, согласно (3.1) имеем, что существует $T' < T(q)$ такое, что на $[T',T(q))$ справедливо равенство

$$\psi^{(n)}(t,T(q)) = (-1)^{n-1}. \tag{1}$$

Тогда на $[T', T(q))$ имеем

$$\psi(t, T(q)) = (-1)^{n-1} \frac{(t - T(q))^n}{n!} + \\ + \psi_-(T(q), T(q)) \frac{(t - T(q))^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (2)$$

Из теоремы о посадке получим

$$x(t, T(q)) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{T(q)}^{t} (t - \tau)^{n-1} u(\tau, T(q))\, d\tau \mid [0, T(q)]. \quad (3)$$

Рассмотрим случай нечетного n. В этом случае $\psi_-(T(q), T(q)) \geqslant 0$. Но если допустить строгое неравенство, то получим, что в левой окрестности $T(q)$ выполнено неравенство: $\psi(t, T(q)) > 0$, откуда $u(t, T(q)) > 0$ и, согласно (3), $x(t, T(q)) < 0$. Однако это неравенство неверно. Следовательно, $\psi_-(T(q), T(q)) = 0$. Тогда из (2) получим: $\psi(t, T(q)) < 0$. Откуда $u(t, T(q)) < 0$ и, следовательно, $x(t, T(q)) > 0 \,|[T', T(q))$. Но тогда T' можно взять равным нулю. Таким образом, в случае нечетного n и простой посадки имеем $\mathcal{E}_0(T(q)) \neq \varnothing$. Представим $x(t, T(q))$ в виде: $\hat{x}(t - T(q))$, где функция $\hat{x}(\cdot)$ не зависит от q. Функцию $\hat{x}(\cdot)$ нетрудно вычислить, пользуясь формулами (2) и (3). Мы отметим лишь, что существует функция $\hat{q}(T)|(0, \infty)$ такая, что простая посадка имеет место лишь для тех q, для которых существует T' такое, что $q = \hat{q}(T')$. Функция $\hat{q}(\cdot)$ такова, что $T(\hat{q}(T')) = T'$ для всех T'. Если q не принадлежит множеству значений функции $\hat{q}(\cdot)$, то имеет место непростая посадка.

Рассмотрим случай четного n. В этом случае $\psi_-(T(q), T(q)) \leqslant 0$. Однако случай равенства следует исключить. Иначе, согласно (2), в левой окрестности $T(q)$ выполнено неравенство $\psi(t, T(q)) < 0$, откуда $u(t, T(q)) < 0$ и, согласно (3), $x(t, T(q)) < 0$. Итак, $\psi_-(T(q), T(q)) < 0$. Из (2), (3) легко получить, что $x(t, T(q))$ допускает представление

$$x(t, T(q)) = \hat{x}(t - T(q), \psi_-(T(q), T(q))),$$

где $\hat{x}(\cdot, \cdot)$ — некоторая функция. Функция $\hat{x}(v, \psi_-)$ имеет на отрицательной полуоси единственный простой корень. Следовательно, $\mathcal{E}_0(T(q))$ либо пусто, либо состоит из одной точки $t = 0$. В свою очередь q, для которых имеет место простая посадка, и только они, допускают представление $q = \hat{\hat{q}}(T, \beta)$. При этом $T(\hat{\hat{q}}(T', \beta)) = T'$. Для всех других q осуществляется непростая посадка.

Из проведенных рассмотрений следует, что при $n = 1$ и $n = 2$ осуществляются только простые посадки. Но при $n \geqslant 3$ основным типом посадки становится непростая посадка.

§ 8. Заключение

Теорема о посадке была доказана в работах [1] и [3]. В этих работах рассматривался случай $n = 3$, $p = 2$. В работе [3] теорема устанавливалась из соображений автомодельности. В работе [1] подробно были исследованы экстремали через их связь с полиномами. Однако для $n > 3$ оба метода не применимы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дикусар В.В., Милютин А.А.* Качественные и численные методы в принципе максимума.— М.: Наука, 1989
2. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // Ж. вычисл. мат. и мат. физ.— 1965.— 5, № 3.— С. 393–453 (РЖМат, 1965, 12Б414)
3. *Robbins H.M.* Junction phenomena for optimal control problems with state variable inequality constraints of third order // J. Optimiz. Theory and Appl.— *31*, № 1.— С. 85–99

Центральный экономико-математический институт РАН, Москва, Россия