ОБОБЩЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА БОГОЛЮБОВА — КРЫЛОВА

В. Л. Боднева, А. А. Милютин

Асимптотический метод Боголюбова — Крылова обычно применяется к системам: $\dot{y} = \varepsilon f(y, t)$; $y \in R^n$, $0 \leqslant t \leqslant T/\varepsilon$, $\varepsilon \to 0$. Исходная задача заменой переменной $\tau = \varepsilon t$ сводится к задаче на конечном интервале

(1) $$\dot{y} = f(y, \tau/\varepsilon), \qquad y \in R^n, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T, \quad \varepsilon \to 0.$$

Рассмотрим систему с произвольной зависимостью от параметра

(2) $$\dot{y} = f(y, t, \lambda), \qquad y \in R^n, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad \lambda \to \lambda_0 \quad (\lambda \neq \lambda_0).$$

Теорема Боголюбова [1] (нулевое приближение) для систем (1) была обобщена на случай (2) в работах [2]—[3] и др.

В настоящей работе предлагается процесс построения высших приближений, когда зависимость от параметра может быть негладкой и, в отличие от метода Боголюбова — Крылова, заранее неизвестна шкала порядков.

Пусть G — группа преобразований $R^n \to R^n : y = Y(x)$, $Y \in G$; $\mathscr{L}$ — линейное многообразие преобразований $y = z(x)$, касательных к группе в ее единице. Пусть для любого $z \in \mathscr{L}$ определен оператор $P(z) = Y \in G$. Назовем этот оператор проектом, если для него справедливо разложение

(3) $$P(\varepsilon, z) = x + \varepsilon z + \varepsilon^2 q_2(z) + \ldots + \varepsilon^{k-1} q_{k-1}(z) + \varepsilon^k \rho_k(z, \varepsilon),$$

где q_i — i-я форма. Например, проектор $P(z)$ может быть определен как решения уравнения $dx/d\tau = z(x)$. Для гамильтоновых систем $P(z)$ может определяться через производящую функцию.

Пусть в (2) $f(x, t, \lambda) \in \mathscr{L}$ $\forall t, \lambda$. Задача состоит в том, чтобы найти ограниченные вместе с производной по x функции $z_i(x, t, \lambda) \in \mathscr{L}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, чтобы преобразование

(4) $$y = Y^*_{k+1}(x, t, \lambda) = P(\varepsilon_1, z_1) \cdot P(\varepsilon_2, z_2) \ldots P(\varepsilon_{k+1}, z_{k+1})$$

переводило систему (2) в систему

(5) $$\dot{x} = \varepsilon_0(\lambda)\varphi_0(x, t) + \ldots + \varepsilon_{k+1}(\lambda)\varphi_{k+1}(x, t) + \mathscr{D}_{k+1}(x, t, \lambda),$$

причем должны быть выполнены условия

(6) $$\begin{cases} \text{а) } \varepsilon_0(\lambda) \to 1 \qquad (\lambda \to \lambda_0), \\ \text{б) } \varepsilon_i(\lambda) = o(\varepsilon_{i-1}(\lambda)), \\ \text{в) } \overline{\mathscr{D}_i(x, t, \lambda)/\varepsilon_i(\lambda)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

(черта означает взятие слабого предела семейства $\mathscr{D}_i(x, t, \lambda)/\varepsilon_i(\lambda)$ при $\lambda \to \lambda_0$).

Определим процесс по индукции: $Y_0 = E$; $y = \xi$; $\varepsilon_0(\lambda) \to 1$; $\dot{\xi} = \varepsilon_0(\lambda)\varphi_0(\xi, t) + \mathscr{D}_0(\xi, t, \lambda)$; $\mathscr{D}_0(\xi, t, \lambda) = f(\xi, t, \lambda) - \varepsilon_0(\lambda)\varphi_0(\xi, t)$. Так как должно выполняться условие $\overline{\mathscr{D}_0(\xi, t, \lambda)/\varepsilon_0(\lambda)} = 0$, то $\varphi_0(\xi, t) = \overline{f(\xi, t, \lambda)}$. Пусть процесс определен до k-го шага, т. е. известны порядок $\varepsilon_k(\lambda) = o(\varepsilon_{k-1}(\lambda))$; $y(\eta, t, \lambda) = Y^*_k = Y^*_{k-1}(P(\varepsilon_k(\lambda), z_k(\eta, t, \lambda))$; $\varphi^*_k(\eta, t, \lambda) = \varepsilon_0(\lambda)\varphi_0(\eta\, t) + \ldots + \varepsilon_k(\lambda)\varphi_k(\eta, t)$. Покажем, как по k-му приближению строится $(k+1)$-е На k-м шаге система имеет вид

(7) $$\dot{\eta} = \varepsilon_0(\lambda)\varphi_0(\eta, t) + \ldots + \varepsilon_k(\lambda)\varphi_k(\eta, t) + \mathscr{D}_k(\eta, t, \lambda).$$

Надо найти ограниченную вместе с производной по x функцию $z_{k+1}(x, t, \lambda) \in \mathscr{L}$, чтобы преобразование $\eta = Y_{k+1}(x, t, \lambda) = P(\varepsilon_{k+1}(\lambda), z_{k+1})$ переводило (7) в (5). На k-м шаге $\mathscr{D}_{k+1}(x, t, \lambda) = (Y_{k+1})_x^{-1}(\varphi^*_k(Y_{k+1}, t, \lambda) + \mathscr{D}_k(Y_{k+1}, t, \lambda) - (Y_{k+1})_t) - \varphi^*_k(x, t, \lambda) - \varepsilon_{k+1}(\lambda)\varphi_{k+1}(x, t)$, где $(Y_{k+1})_x = \partial Y_{k+1}/\partial x$. Используя (3), получим

(8) $$\mathscr{D}_{k+1}(x, t, \lambda) = \varepsilon_{k+1}(\lambda)\{\varphi^*_k, z_{k+1}\} + \varepsilon_{k+1}(\lambda)\{\mathscr{D}_k, z_{k+1}\} + \varepsilon_{k+1}(\lambda)\varphi_{k+1}(x, t) + \mathscr{D}_k(x, t, \lambda) - \varepsilon_{k+1}(\lambda)(z_{k+1})_t + O(\varepsilon^2_{k+1}(\lambda)).$$

Так как $\mathscr{D}_k \sim \varepsilon_k(\lambda)$, а $\mathscr{D}_{k+1}$ должно быть порядка $\varepsilon_{k+1}(\lambda)$, то должно выполняться условие

(9) $$D_k(x, t, \lambda) - \varepsilon_{k+1}(\lambda)(z_{k+1}(x, t, \lambda))_t = \varepsilon_{k+1}(\lambda)(r_{k+1})_t,$$

где $r_{k+1}(x, t, \lambda)$ выбирается касательной в единице G, ограниченной вместе с производными. Из (9) получаем $(z_{k+1})_t \sim \varepsilon_k(\lambda)/\varepsilon_{k+1}(\lambda)$; $z_{k+1}(x, t, \lambda) = \dfrac{1}{\varepsilon_{k+1}(\lambda)} \displaystyle\int^t \mathscr{D}_k(x, t, \lambda)dt -$ $- r_{k+1}(x, t, \lambda)$. Так как $z_{k+1}(x, t, \lambda)$ должна быть ограничена, то порядок $\varepsilon_{k+1}(\lambda)$ надо выбирать равным порядку $\displaystyle\int^t \mathscr{D}_k(x, t, \lambda)dt$ или более грубым. Из (6, в)) на k-м шаге следует, что $\varepsilon_{k+1}(\lambda) = o(\varepsilon_k(\lambda))$. Положив $\varphi_{k+1}(x, t) = \overline{\{\varphi_k^*, z_{k+1}\}} + \overline{\{\mathscr{D}_k, z_{k+1}\}} +$ $+ \overline{(r_{k+1}(x, t, \lambda))_t}$, получим из (8), что на $(k+1)$-м шаге условие (6, в)) будет выполнено. На 1-м шаге $\varphi_1(x, t) = \overline{\{\varphi_0(x, t), z_1(x, t, \lambda)\}} + 1/2\overline{\{\mathscr{D}_0, z_1\}} + \overline{(r_1)_t}$. Таким образом, $(k+1)$-е приближение построено, и процесс рекуррентно определен.

Пусть система имеет вид (1). Выбирая G группой всех диффеоморфизмов в R^n, $P(z) = x + z$, получим (при определенном выборе r_k) процесс Боголюбова — Крылова. Пусть (1) есть гамильтонова система. Если G — группа канонических преобразований, $P(z)$ определяется через производящую функцию, то процесс переходит в метод Федорченко. Если в качестве $r_{k+1}(x, t, \lambda)$ выбирать решение уравнения в частных производных

$$(r_{k+1})_t + \{\varphi_k^* + \mathscr{D}_k, r_{k+1}\} + \{\varphi_k^* + \mathscr{D}_k, \frac{1}{\varepsilon_{k+1}(\lambda)}\int \mathscr{D}_k(x, t, \lambda)dt\} - \varphi_{k+1}(x, t, \lambda) -$$
$$- \varepsilon_{k+1}(\lambda)\rho_{k+1}(x, t, \lambda) = 0,$$

где φ_{k+1}, ρ_{k+1} — произвольные ограниченные функции, касательные в единице группы, то $\varepsilon_{k+1}(\lambda) = o(\varepsilon_k^2(\lambda))$, т. е. получим аналог метода ускоренной схоимости [4].

Связь между решением (7) и системой k-го приближения

$$\dot{x} = \varepsilon_0(\lambda)\varphi_0(x, t) + \ldots + \varepsilon_k(\lambda)\varphi_k(x, t) = \varphi_k^*(x, t, \lambda) \tag{10}$$

дается теоремой о «слипании» двух семейств решений.

Т е о р е м а. *Пусть выполнены условия*: 1) $\varphi_k^*(x, t, \lambda)$, $\mathscr{D}_k(x, t, \lambda)$ *измеримы по* t *на любом отрезке* $\Delta = [t_0, t_1] \forall x \in R^n$, $\forall\lambda$; 2) $\varphi_k^*(\cdot, t, \lambda)$, $\mathscr{D}_k(\cdot, t, \lambda)$ *ограничены и удовлетворяют условию Липшица в любой ограниченной области*; 3) $\overline{\mathscr{D}_k(x, t, \lambda)/\varepsilon_k(\lambda)} = 0$. *Тогда для любого* Δ, *любого ограниченного решения* $x(t, \lambda)$ *системы* (10) *и любого семейства* $\alpha(\lambda)$ $(|\alpha(\lambda)| = o(\varepsilon_k(\lambda)))$ *существует* (*для* λ, *достаточно близких к* λ_0) *такое ограниченное решение* $\eta(t, \lambda)$ *системы* (7), *что*: $\eta(t_0, \lambda) = x(t_0, \lambda) + \alpha(\lambda)$, $\|\eta(t, \lambda) - x(t, \lambda)\|_{C_\Delta} = o(\varepsilon_k(\lambda))$.

Теорема будет справедлива, если в формулировке $x(t, \lambda)$ и $\eta(t, \lambda)$ поменять местами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Б о г о л ю б о в Н. Н., М и т р о п о л ь с к и й Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.

[2] Г и х м а н И. И. По поводу одной теории Н. Н. Боголюбова//Укр. мат. журн.— 1952.— Т. 4, № 2.— С. 215—218.

[3] К р а с н о с е л ь с к и й М. А., К р е й н С. Г. О принципе усреднения в нелинейной механике//УМН, 1955.— Т. 10, вып. 3(65).— С. 147—152.

[4] А р н о л ь д В. И. Особенности дифференцируемых отображений//УМН.— 1968.— Т. 23, вып. 1 (139).— С. 1—44.

Институт химической физики
АН СССР

Поступило в Правление общества
3 января 1986 г.