А. А. Милютин

СМЕШАННЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ И КИНЕТИЧЕСКАЯ СВЯЗЬ В МЕХАНИКЕ

Мы покажем, что смешанные ограничения типа равенства и кинематическая связь в механике — ограничения, вообще говоря, разной природы. Мы рассмотрим простейший вариант, когда кинематическая связь имеет вид:

$$(r(x),\ \dot{x})=0, \tag{1}$$

где $r(x)$ — некоторое векторное поле в пространстве $\mathrm{R}^{\mathrm{d}(x)}$, и выполнено условие

$$|r(x)|>0\ \forall x\in\mathrm{R}^{\mathrm{d}(x)}$$

(через $\mathrm{d}(a)$ мы обозначаем размерность вектора a).

Если на материальную точку не действуют никакие силы, кроме реакции связи, то, как известно, уравнение движения точки единичной массы имеет вид:

$$\ddot{x}=\lambda r(x). \tag{2}$$

Величина λ находится из условия (1). Продифференцировав его, получим, учитывая (2)

$$(r_x(x)\dot{x},\ \dot{x})+\lambda(r(x),\ r(x))=0,$$

откуда

$$\lambda=-\frac{(r_x(x)\dot{x},\ \dot{x})}{(r(x),\ r(x))}. \tag{3}$$

Подставляя это выражение для λ в (2), получим, что x удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$\ddot{x}=-\frac{(r_x(x)\dot{x},\ \dot{x})}{(r(x),\ r(x))}r(x). \tag{4}$$

Если в какой-либо момент движения x и $\dot{x}$ удовлетворяют связи, то и все движение удовлетворяет условию задачи, что легко следует из уравнения (4).

Рассмотрим теперь вариационную задачу на минимум действия,

$$J=\frac{1}{2}\int\dot{x}^2\,\mathrm{d}t\to\min$$

при наличии смешанного ограничения равенства

$$r(x)\dot{x}=0.$$

Каноническая форма соответствующей системы оптимального управления следующая:

$$\dot{y}=\frac{u^2}{2}, \quad \dot{x}=u, \quad r(x)u=0. \tag{5}$$

Эту систему, как обычно, обозначим через S.

Условия экстремальности в системе S имеют следующий вид. Положим

$$H=\psi_y\frac{u^2}{2}+\psi_x u+\psi_t.$$

Существуют функции $\psi(t)=(\psi_y(t),\ \psi_x(t),\ \psi_t(t))$ и $b(t)$ такие, что выполнены следующие условия:

а) условия максимума

$$\psi_y\frac{u^2}{2}+\psi_x u+\psi_t=\max_{r(x)u'=0}\left(\psi_y\frac{(u')^2}{2}+\psi_x u'+\psi_t\right)=0; \tag{6}$$

б) локальный принцип максимума

$$\psi_y u+\psi_x+b(t)r(x)=0; \tag{7}$$

в) сопряженные уравнения

$$-\dot{\psi}_y=0, \quad -\dot{\psi}_x=b(t)ur_x, \quad -\dot{\psi}_t=0. \tag{8}$$

Из условий максимума следует, что $\psi_y\leqslant 0$.

Мы рассмотрим семейство экстремалей, на которых $\psi_y\neq 0$. Тогда из условий максимума следует, что $\psi_y<0$. Мы будем считать, что $\psi_y=-1$.

Локальный принцип максимума дает:

$$u=\psi_x+b(t)r(x). \tag{9}$$

Умножая это уравнение на $r(x)$, получим

$$\psi_x r+b(t)(r,r)=0,$$

откуда

$$b=-\frac{(\psi_x,\ r)}{(r,\ r)}.$$

Таким образом, множитель Лагранжа b является функцией ψ_x и x. Отсюда с помощью (9) найдем выражение для u через ψ_x и x:

$$u=\psi_x-\frac{(\psi_x,\ r)}{(r,\ r)}r. \tag{10}$$

Таким образом, u есть ортогональная к r составляющая ψ_x. Подставляя в условие максимума найденное выражение для u, получим:

$$H=-\psi_t=-\frac{1}{2}\left(\psi_x-\frac{(\psi_x,\ r)}{(r,\ r)}r\right)^2+\left((\psi_x,\ \psi_x)-\frac{(\psi_x,\ r)^2}{(r,\ r)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(\psi_x,\ \psi_x)-\frac{1}{2}\frac{(\psi_x,\ r)^2}{(r,\ r)}. \tag{11}$$

Таким образом, мы получили выражение для H в зависимости от ψ_x и x. Нетрудно видеть, что изменение ψ_x и x вдоль экстремали удовлетворяет гамильтоновой системе уравнений

$$\dot{x}=H_{\psi_x}, \quad -\dot{\psi}_x=H_x. \tag{12}$$

Действительно, $H=-\frac{U^2}{2}+\psi_x U$, где функция $U(\psi_x,\ x)$ определена равенством (10). Тогда $H_{\psi_x}=U+(-U+\psi_x)U_{\psi_x}$. Но согласно локальному принципу максимума выражение в скобках равно $\frac{(\psi_x,\ r)}{(r,\ r)}r$. С другой стороны, из равенства $r(x)U(\psi_x,\ r)\equiv 0$ следует, что $(r,\ U_{\psi_x})=0$. Следовательно, $H_{\psi_x}=U$. Из уравнения $\dot{x}=U$ следует, что $\dot{x}=H_{\psi_x}$.

Найдем теперь выражение для H_x. Очевидно,

$$H_x = (-U + \psi_x) U_x = -b(r, U_x).$$

Но $(r, U)_x = Ur_x$. Следовательно, $Ur_x + rU_x = 0$, откуда $-rU_x = Ur_x$. Следовательно, $H_x = bUr_x$. Отсюда и из сопряженного уравнения получаем: $-\dot{\psi}_x = H_x$.

Мы доказали, таким образом, что экстремали являются решениями системы уравнений (12). В то же время любое решение системы (12) является ослабленной экстремалью.

Система S, однако, является системой с независимыми градиентами, поэтому классы ослабленных экстремалей и экстремалей в системе S совпадают. Таким образом, множество экстремалей системы S, для которых $\psi_y = -1$, совпадают с множеством решений гамильтоновой системы (12).

Выясним, при каких условиях система (12) эквивалентна уравнению второго порядка относительно x. Для простоты мы предположим, что $|r(x)| = 1 \ \forall x$. Для уравнения связи это не имеет ровно никакого значения. Для системы S переход от ограничения $(r, u) = 0$ к ограничению $\left(\frac{r}{|r|}, u\right) = 0$ является «перепиской». Следовательно, по теореме об инвариантности экстремалей регулярной системы относительно переписки множество экстремалей не изменится при таком переходе.

Пусть в некоторой точке x задана величина u так, что $(r(x), u) = 0$. Согласно формуле (10) ψ_x определяется этим заданием с точностью до слагаемого $\lambda r(x)$, где λ — произвольное вещественное число.

Пусть задано ψ_x, удовлетворяющее (10). Дифференцируя уравнение локального принципа максимума по t, получим:

$$\dot{u} = \dot{\psi}_x + b\dot{r} + \dot{b}r = b(r_x u - ur_x) + \dot{b}r. \tag{13}$$

Дифференцирование корректно, ибо $b = -\psi_x r$, и, следовательно, $b(t)$ — липшицева функция. Но тогда и u — липшицева функция. Отсюда в свою очередь следует, что ψ_x, $b(t)$, $u(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции.

Из формулы $b = -(\psi_x, r)$ и сопряженного уравнения следует:

$$\dot{b} = -(\dot{\psi}_x, r) - (\psi_x, \dot{r}) = bur_x r - (\psi_x r_x u).$$

Подставляя выражение для b и $\dot{b}$ в формулу (13), получим:

$$\ddot{x} = -(\psi_x, r)\{(r_x u - ur_x) + (ur_x r) r\} - (\psi_x r_x u) r. \tag{14}$$

Если ψ_x изменяется на λr, то правая часть этой формулы изменяется на величину

$$-\lambda\{r_x u - ur_x + (ur_x r) r\} - \lambda(rr_x u) r.$$

Для того чтобы $\ddot{x}$ однозначно определялась по x и $\dot{x}$, необходимо и достаточно, чтобы это выражение равнялось нулю при любом λ. Следовательно, должно быть:

$$(r_x u - ur_x) + (ur_x r) r + (rr_x u) r = 0.$$

Но последнее слагаемое равно нулю, ибо равно $\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt} r^2\right) r$, а по условию $r^2 \equiv 1$.

Таким образом, мы получили следующее условие, необходимое и достаточное для того, чтобы система (12) была эквивалентна уравнению второго порядка относительно x:

$$(r_x u - ur_x) + (ur_x r) r = 0 \ \forall x, \ \forall u \perp r(x). \tag{15}$$

Если это условие выполнено, то из формулы (14) следует, что

$$\ddot{x} = -(\psi_x r_x u) r.$$

В этом случае движение по экстремалям совпадает с движением механической системы под действием кинематической связи.

Таким образом, для того чтобы множество движений при наличии кинематической связи совпадало с множеством движений, соответствующих экстремалям системы S, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие (15).

Продолжим это исследование. Очевидным его следствием является утверждение о том, что оператор $r_x u - u r_x$ переводит любое u, ортогональное к r, а вектор коллинеарный r.

Однако это утверждение не только является следствием условия (15). Из него в свою очередь оно следует. Действительно, вектор $r_x u - u r_x + (u r_x r) r$ ортогонален r при любом u. В этом можно убедиться непосредственно, умножая его скалярно на r и учитывая, что $r r_x u = 0$, $(r, r) = 1$.

Следовательно, если вектор $r_x u - u r_x$ коллинеарен вектору r, то $r_x u - u r_x + (u r_x r) r = 0$, т. е. условие (15) выполнено. Утверждение доказано.

Итак, условие (15) эквивалентно условию

$$r_x u - u r_x \| r \quad \forall x, \ \forall u \perp r(x). \tag{16}$$

Пусть $\mu(x)$ — произвольная положительная функция. Положим $\rho(x) = \mu(x) r(x)$. Тогда условие (16) эквивалентно условию

$$\rho_x u - u \rho_x \| \rho \quad \forall x, \ \forall u \perp \rho(x).$$

Действительно,

$$\rho_x u - u \rho_x = (\mu_x, u) r + \mu(x) r_x u -$$
$$- \mu_x(x)(u, r) - \mu(x)(u, r_x) =$$
$$= \mu(x)(r_x u - u r_x) + (\mu_x, u) r + \mu_x(x)(u, r).$$

Но последнее слагаемое равно нулю, ибо $(r, u) = 0$. Таким образом, условие (16) следует из условия (15). Обратное следование устанавливается аналогичным путем.

Итак, мы доказали, что условия (15) и (16) эквивалентны. Теперь мы можем сформулировать условие для любого поля $r(x)$, а не только для поля, которое удовлетворяет условию $|r| = 1$.

Для того чтобы кинематическая связь и смешанное ограничение порождали один и тот же класс движений, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие

$$r_x u - u r_x \| r \quad \forall x, \ \forall u \perp r(x). \tag{17}$$

Здесь $r(x)$ — произвольное векторное поле, удовлетворяющее лишь условию $|r| > 0$. Этому условию можно придать следующий эквивалентный вид.

Положим $\Gamma(x) = \{v \mid v = r_x u - u r_x, \ u \perp r\}$. Тогда условие (17) эквивалентно условию

$$\dim(\Gamma(x)) \leqslant 1 \quad \forall x. \tag{18}$$

Условие (18) является тривиальным следствием условия (17). Докажем обратное.

Матрица преобразования $u \to r_x u - u r_x$ имеет, очевидно, вид: $r_x - r_x^*$. Таким образом, данное преобразование является кососимметрическим, и, следовательно, переводит любой вектор в вектор, к нему ортогональный. Так как Γ является или точкой, или прямой, то подпространство $(r, u) = 0$ переходит в подпространство своего ортогонального дополнения. Следовательно, $\Gamma(x) \subset \mathrm{Lin}(r)$, где $\mathrm{Lin}(r)$ — линейная оболочка, натянутая на вектор r, т. е. содержащая его прямая. Тем самым мы получили условие (17). Эквивалентность условий (17) и (18) доказана.

Теперь легко показать, что, воообще говоря, кинематическая связь

(1) и смешанное ограничение (5) приводят к различным движениям, ибо условие (18) выполнено далеко не всегда.

В трехмерном пространстве (x_1, x_2, x_3) рассмотрим оператор Q поворота на $\frac{\pi}{2}$ вокруг оси x_1 и положим $r(x)=Qx$. Нас будут, естественно, интересовать движения в области $x\neq 0$. Очевидно, $Q-Q^*$ — оператор, который ось x_1 переводит в нуль, а плоскость $(0, x_2, x_3)$ растягивает в два раза и поворачивает на $\frac{\pi}{2}$. Если компонента x_1 вектора x отлична от нуля, то в точке x условие (18) не выполнено, ибо подпространство, ортогональное Qx, не содержит оси x_1, и, следовательно, $\dim(\Gamma(x))=2$. Условие (18) выполнено лишь в точках плоскости (x_2, x_3). Таким образом, условие (18) не выполнено на открытом множестве, и на этом множестве движения, порожденные кинематической связью и смешанным ограничением, различны. Таким образом, кинематическая связь и смешанное ограничение — ограничения разной природы уже в трехмерном пространстве.

На плоскости условие (18) тривиально выполнено, и, следовательно, в плоском случае кинематическая связь и смешанное ограничение порождают одинаковые движения.