1970 г. сентябрь—октябрь *т. XXV, вып. 5 (155)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 519.35

ОБЩИЕ СХЕМЫ ПОЛУЧЕНИЯ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ЭКСТРЕМУМА И ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А. А. Милютин

Общие схемы получения необходимых условий экстремума возникли в результате обобщения теоремы Куна и Таккера на бесконечномерные пространства, а также в результате анализа принципа максимума Л. С. Понтрягина. Условие Куна — Таккера не является условием стационарности, ибо случай, когда в силу ограничений мы не располагаем достаточным запасом вариаций, не охватывается им. В принципе максимума этот случай допускается.

Исследование принципа максимума привело к следующей схеме получения условия стационарности (А. Я. Дубовицкий и А. А. Милютин, 1963 г.). В окрестности точки локального экстремума (скажем, минимума) пересечение некоторой системы множеств (множество, на котором функционал принимает меньшие значения, множества, выделяемые ограничениями) пусто. Условие стационарности есть условие непересечения некоторых аппроксимаций этих множеств, коль скоро пересечение аппроксимаций влечет за собой пересечение исходных множеств.

При этом рассматривалась задача в линейном топологическом локально выпуклом пространстве (Л. Т. П.), причем множества аппроксимировались множествами касательных направлений. Далее, предполагалось, что в задаче имеются конечное число множеств, которые аппроксимировались открытыми выпуклыми конусами (ограничения типа неравенств), и множество, аппроксимация которого являлась выпуклым конусом без внутренних точек (пересечение всех ограничений типа равенства). Условие стационарности (непересечение аппроксимаций) формулировалось как условие существования нетривиального решения некоторого уравнения (уравнения Эйлера), связывающего элементы сопряженного пространства. Приведем точную формулировку.

Пусть в Л. Т. П. задана система выпуклых конусов $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_n$, причем конусы $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ являются открытыми. Для того, чтобы пересечение этой системы было пустым, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i = 0$, где λ_i — элементы сопряженного пространства, имело *нетривиальное решение, удовлетворяющее уловию* $\lambda_i(x_i)\geqslant 0$ $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$ *при любых* $x_i\in\Omega_i$.

Нам кажется, что представление о стационарности как об условии непересечения аппроксимаций имеет весьма общий характер. Общие схемы получения необходимых условий, предлагаемые различными авторами (Б. Н. Пшеничный [1], Л. Нейштадт [3], Р. В. Гамкрелидзе [2]), отличаются с этой точки зрения выбором пространства, в котором рассматривается задача, и способом аппроксимации множеств.

Рассмотрим общую схему, предложенную Л. Нейштадтом [3]. Задача рассматривается в Л. Т. П. Х. Имеются три ограничения, которые аппроксимируются множествами касательных направлений. Аппроксимация первого ограничения есть открытый выпуклый конус Z. Аппроксимация второго ограничения есть подпространство П конечной коразмерности. Аппроксимация K третьего ограничения Q является выпуклым конусом и, кроме того, для любых $x_1,\ \ldots,\ x_n\in K$ и любой окрестности нуля U найдется для каждого достаточно малого $\varepsilon>0$ такое непрерывное отображение ζ_ε симплекса $S_n=\{(\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n)\colon\ \beta_i\geqslant 0,\ \sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i=1\}$ в Q, что при $(\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n)\in S_n$ имеем

$$\zeta_\varepsilon(\beta_1,\beta_2,\ \ldots,\ \beta_n)\in\varepsilon\Big(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i+U\Big).$$

Аппроксимация Γ' множества точек с меньшими значениями функционала есть полупространство, определяемое неравенством $\lambda_0(x)<0$, $\lambda_0\in X^*$. Основной результат Нейштадта состоит в следующем.

Пусть $x=0$ — *экстремальная точка. Тогда либо* $\Pi+K\neq X$, *либо существует такое* $\psi_0\geqslant 0$ *и такие* λ_Z, $\lambda_\Pi\in X^*$, *что*

$$\lambda_Z(x)\geqslant 0\quad (x\in Z),\qquad \lambda_\Pi(x)=0\quad (x\in\Pi),$$
$$-\psi_0\lambda_0(x)+\lambda_Z(x)+\lambda_\Pi(x)\leqslant 0\quad (x\in K),$$

причем ψ_0, λ_Z, λ_Π *не обращаются одновременно в нуль.*

Условие Л. Нейштадта шире условия стационарности. Он рассматривает аппроксимации (П и K) не одного, а, вообще говоря, двух ограничений типа равенства (конус K может не иметь внутренних точек). В этом случае для формулировки необходимого условия экстремума надо знать ответ на следующие вопросы. Является ли пересечение аппроксимаций к ограничениям типа равенств аппроксимацией к их пересечению, и является ли линейный функционал, опорный к пересечению аппроксимаций П и K, суммой линейных функционалов, опорных, соответственно, к П и K?

Равенство $\Pi+K=X$ означает утвердительный ответ на оба вопроса (что легко доказывается), и условия Нейштадта означают существование нетривиального решения уравнения Эйлера для системы Γ', Z, $\Pi\cap K$. Таким образом, при $\Pi+K=X$ мы имеем систему аппроксимаций такую, что из пересечения аппроксимаций следует пересечение исходных множеств, и условие Л. Нейштадта совпадает с условием стационарности.

Если же $\Pi + K \neq X$, то мы не можем ответить на поставленные вопросы и, следовательно, не имеем удовлетворительной аппроксимации системы множеств. Именно, мы не располагаем аппроксимацией пересечения двух ограничений типа равенства. Поэтому условие $\Pi + K \neq X$ есть просто описание ситуации, когда мы не можем извлечь информацию из имеющихся в нашем распоряжении аппроксимаций.

Схема Л. Нейштадта непосредственно обобщает конструкцию принципа максимума Л. С. Понтрягина.

Изложенные выше общие схемы возникли из анализа принципа максимума Л. С. Понтрягина. Но роль принципа максимума в теории общих схем этим не исчерпывается. Стремление получить принцип максимума применением общих схем, а также исследовать задачи оптимального управления, ранее не изученные, привело к расширению общей схемы и к выделению случаев, допускающих иную формулировку условия стационарности, нежели уравнение Эйлера. Остановимся на этом подробнее.

Прежде всего оказывается, что «кривые сравнения», с помощью которых устанавливается принцип максимума, не дифференцируемы в пространстве управлений. Возьмем хотя бы вариации, связанные со скользящими режимами. Пусть $u^0(t)$ — оптимальное управление; $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ — некоторые допустимые управления; $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)$ $(\alpha_i \geqslant 0, \sum \alpha_i \leqslant 1)$ — некоторые измеримые функции, играющие роль параметров кривой сравнения. Управление $u(t;\ \delta,\ \varepsilon,\ \tau)$ выберем так, чтобы удовлетворялись требования:

$$\int\limits_{\Delta} u(t;\ \delta,\ \varepsilon,\ \tau)\,dt = \int\limits_{\Delta}\Big[1 - \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(t)\,u^0(t) + \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(t)\,u_i(t)\Big]\,dt + \tau(\Delta),$$

где Δ — произвольный интервал длины не меньше δ, $|\,\tau(\Delta)\,| \leqslant \tau$. Устремляя к нулю δ, ε, τ, мы получим кривую сравнения. Обычно сначала устремляют к нулю δ и τ, а затем ε. При таком выборе пути кривая сравнения полностью задается параметрами $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)$. Ясно, что эта кривая не дифференцируема в пространстве управлений.

Для того чтобы рассмотрение таких кривых было эффективным, нужно располагать информацией о поведении вдоль них остальных величин, входящих в задачу. Дело сводится к проверке их дифференцируемости по ε и к выводу формул для производных. Дифференцируемость проверяется либо непосредственно, либо с помощью удачной записи задачи в пространстве параметров, малым вариациям которых соответствуют сложные вариации управления.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\mathcal{J} = \varphi(x(T)) \to \min,$$
$$\frac{dx}{dt} = f(x,\ u,\ t),$$
$$x(0) = x_0,\quad u \in U.$$

Эта задача в пространстве параметров $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)$ при фиксированном наборе допустимых управлений $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ может быть записана следующим образом:

$$\mathcal{J} = \varphi(x(T)) \to \min,$$
$$\frac{dx}{dt} = \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\right) f(x, u^0(t), t) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) f(x, u_i(t), t),$$
$$x(0) = x_0, \ \alpha_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqslant 1.$$

При этом дифференцируемость по α функционала и дифференциальных связей не вызывает сомнений, если функции φ и f дифференцируемы по x. Таким образом, с помощью введения параметров мы легко преодолеваем трудность, связанную с недифференцируемостью кривых сравнения.

Однако с помощью параметров мы имеем описание довольно узкого класса вариаций (определяемого набором управлений $u_1(t), \ldots, u_n(t)$). Более того, у нас нет возможности столь же просто рассмотреть класс вариаций, соответствующий объединению всех конечных наборов, хотя именно его надо рассматривать, чтобы с помощью скользящих режимов получить принцип максимума Л. С. Понтрягина. Эта трудность преодолевается двумя способами.

Первый способ (Р. В. Гамкрелидзе, Л. Нейштадт) состоит в следующем. Задача рассматривается в пространстве образов, которое, в противоположность пространству параметров, не зависит от выбора узкого класса вариаций управления. В этом пространстве мы можем переписать поставленную задачу в форме, допускающей дифференцирование вдоль «кривых сравнения» по ε. В приведенной выше задаче за такое пространство можно взять, например, пространство фазовых траекторий $x(t)$ и в качестве ограничения рассмотреть множество Q всех функций $x(t)$, которые удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \qquad x(0) = x_0, \ u \in U.$$

Исследование задачи в пространстве образов проводится по образцу, изложенному выше (множества аппроксимируются и записывается условие непересечения аппроксимаций). Аппроксимация множества находится с помощью представления задачи в пространствах параметров, т. е. с помощью узких классов вариаций управления. Мы имеем, таким образом, не столько аппроксимацию образа, сколько образ аппроксимации. В качестве пространства образов не обязательно брать пространство фазовых траекторий. Р. В. Гамкрелидзе и Л. Нейштадт рассматривали также пространство правых частей дифференциальных уравнений.

Второй путь (А. Я. Дубовицкий и А. А. Милютин) связан со следующими рассмотрениями. Коль скоро выбран узкий класс вариаций (например, указан набор $u_1(t), \ldots, u_n(t)$) и задача записана в соответствующем пространстве параметров, мы можем согласно принятой нами общей схеме получить в нем условие стационарности. Оно состоит в том, что множество нетривиальных решений уравнения Эйлера не пусто. Поступая так для каждого узкого класса вариаций, мы получим множество пространств параметров, соответствующих узким классам вариаций, и в каждом из них — множество нетривиальных решений уравнения Эйлера. Если мы учтем, что классы вариаций можно упорядочить по вложению, то придем к следующей конструкции.

Имеется частично упорядоченное множество A, являющееся фильтром. Для каждого $a \in A$ задано Л. Т. П. X_a. Пространства X_a связаны друг с другом при помощи линейных операторов $F_{a\leftarrow b}$: $X_b \to X_a$, определенных для каждой упорядоченной пары $a \geqslant b$ и удовлетворяющих требованию транзитивности: $F_{c\leftarrow a}F_{a\leftarrow b} = F_{c\leftarrow b}$.

В каждом пространстве X_a имеется система выпуклых конусов $\Omega_0^a, \Omega_1^a, \ldots, \Omega_n^a$, причем

1) $\Omega_1^a, \ldots, \Omega_n^a$ открыты в X_a;

2) $\bigcap\limits_{i=0}^{n} \Omega_i^a = \varnothing$;

3) если $\lambda \in X_a^*$ и $\lambda(x) \geqslant 0\ (x \in \Omega_{i_0}^a)$, то

$$\lambda(x) \geqslant 0 \quad (x \in F_{a\leftarrow b}\Omega_{i_0}^b).$$

Ясно, что множество Λ^a нетривиальных решений уравнения Эйлера для системы $\Omega_0^a, \Omega_1^a, \ldots, \Omega_n^a$ не пусто при каждом a. Далее, с помощью операторов $F_{a\leftarrow b}^*$ решение уравнения Эйлера для системы Ω_i^a переходит в решение уравнения Эйлера для системы Ω_i^b (может быть, и тривиальное). Естественно возникает следующий вопрос, когда из каждого множества Λ^a можно выбрать по элементу $\{\lambda_a\}$ так, чтобы $\{\lambda_a\} F_{a\leftarrow b} = \{\lambda_b\}$. Имеет место следующая теорема:

Если множества Λ^a образуют проективную систему относительно $F_{a\leftarrow b}^*$, то она имеет непустой проективный предел.

Элементы указанного предела и есть интересующие нас цепочки нетривиальных решений уравнений Эйлера.

В задачах оптимального управления условия приведенной теоремы выполнены и мы располагаем единым условием стационарности, справедливым для любого узкого класса вариаций. Это условие эквивалентно принципу максимума.

Перейдем к обсуждению вопроса о влиянии на общие схемы задач оптимального управления, не исследованных достаточно полно до появления общих схем, а именно задач, в которых возможности управления зависят от состояния системы (смешанные ограничения).

Во всех упомянутых общих схемах фигурируют элементы сопряженного пространства, опорные к некоторым выпуклым множествам. С другой стороны, принцип максимума использует иные понятия (функция, множество значений управления и т. д.). Следовательно, необходим перевод условия стационарности, сформулированного на языке общих схем, на язык принципа максимума. Ясно, что чем больше мы знаем о природе элементов сопряженного пространства, тем перевод легче осуществить.

В задачах классического вариационного исчисления все интересующие нас элементы сопряженного пространства суть функционалы типа: умножение на функцию и интегрирование. Поэтому переход от условия стационарности в общей форме к классическому уравнению Эйлера не представляет никаких трудностей.

В задачах оптимального управления добавляются ограничения на управления и фазовые переменные, аппроксимация которых приводит к конусу положительных функций. Например, фазовые ограничения аппроксимируются конусом положительных функций в пространстве C, а смешанные ограничения — конусом положительных функций в пространстве L_∞. Если об элементах C^* мы имеем исчерпывающую информацию, то относительно элементов L_∞^* знания наши весьма невелики. В этом причина того, что смешанные ограничения удалось исследовать гораздо позже, чем фазовые ограничения. Изложим общую схему, с помощью которой исследуются задачи со смешанными ограничениями (А. Я. Дубовицкий и А. А. Милютин).

Будем рассматривать не все элементы L_∞^*, а лишь те, о которых мы располагаем достаточной информацией (например, элементы L_1), и попробуем, если это возможно, условие стационарности сформулировать с помощью выделенных элементов. Естественно, мы не можем надеяться, что решение уравнения Эйлера состоит из таких элементов. Однако можно надеяться, используя эти элементы, перейти от условия стационарности в общей форме к принципу максимума.

Этот путь исследования воплощается в следующей общей схеме. Пусть H и X — локально выпуклые топологические пространства в двойственности. Пусть в X имеется семейство S конечных систем выпуклых конусов, причем в каждой системе все конусы, кроме, быть может, одного, открыты. Будем говорить, что *H достаточно для семейства S*, если эквивалентны следующие два утверждения:

1. $\bigcap\limits_{i=0}^{n} \Omega_i = \varnothing$; $\{\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_n\} \in S$; $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ открыты.

2. Для любых $x_1 \in \Omega_1, \ldots, x_n \in \Omega$ и любой окрестности нуля U пространства H найдутся $h_0, \ldots, h_n \in H$ такие, что

$$h_i(y_i) \geqslant 0 \quad (y_i \in \Omega_i;\ i = 0, 1, \ldots, n), \quad \sum_{i=0}^{n} h_i \in U, \quad \sum_{i=1}^{n} h_i(x_i) = 1.$$

Пусть $B_{x_1, \ldots, x_n}$ — множество таких наборов $\{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, где $\lambda_i \in X$, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(x_i) = 1$ и, кроме того, каждый из этих наборов представляет решение уравнения Эйлера для некоторой системы $\{\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_n\} \in S$, удовлетворяющей условию: $x_i \in \Omega_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ — открытые конусы.

Далее, пусть $B^H_{x_1, x_2, \ldots, x_n, U}$ — множество таких наборов $\{h_0, h_1, \ldots, h_n\}$, где $h_i \in H$, что

$$h_i(y_i) \geqslant 0 \quad (y_i \in \Omega_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n), \quad \sum_{i=0}^{n} h_i \in U, \quad \sum_{i=1}^{n} h_i(x_i) = 1.$$

Будем говорить, что *H вполне достаточно для семейства S*, если

$$B_{x_1, \ldots, x_n} = \bigcap_{U} \overline{B^H_{x_1, \ldots, x_n, U}},$$

где черта означает замыкание, отвечающее слабой топологии пространства X^*.

Имеет место следующая теорема.

Пусть X *и* H *— локально выпуклые пространства в двойственности и* $X = H^*$. *Далее, семейство* S *состоит из наборов выпуклых конусов* Ω, *обладающих тем свойством, что существует выпуклый конус* $\Omega_H^* \in H$ *такой, что, во-первых,* $\Omega_H^* \subset \Omega^*$, *во-вторых, из справедливости неравенств* $\lambda(x) \geqslant 0$ *при всех* $\lambda \in \Omega_H^*$ *следует, что* $x \in \bar{\Omega}$, *где черта означает замыкание в* X. *Тогда* H *вполне достаточно для семейства* S.

Мы можем теперь рассматривать в задачах со смешанными ограничениями те элементы L_∞^*, которые принадлежат L_1, поскольку L_∞ и L_1 состоят в двойственности, $L_\infty = L_1^*$ и конус положительных функций в L_∞ того типа, который рассматривается в теореме.

Используя форму условия стационарности, опирающуюся на введенные определения достаточности, мы получаем, в конце концов, принцип максимума.

Мы рассмотрели общие схемы получения необходимых условий экстремума и их связь с задачами оптимального управления. То обстоятельство, что общие схемы изменялись почти с каждой новой задачей оптимального управления, кажется нам неслучайным, поскольку основным вопросом исследования являлся вопрос об эффективном применении общих схем. В этом смысле работа не закончена. Есть еще много задач, которые ждут своего решения (например, условия высших порядков, задачи на минимакс, задачи с функциями многих переменных и т. д.) и исследование которых неминуемо приведет к обогащению и развитию теории общих схем.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Н. Пшеничный, Двойственный метод в экстремальных задачах, I, Кибернетика, № 3 (1963), 89—95.

[2] Р. В. Гамкрелидзе, К теории полной вариации, ДАН **161**:1 (1965), 23—26.

[3] L. W. Neustadt, An abstract variational theory with applications to a broad. class of optimization problem. II. SIAM J. of Control, 5:1 (1967), 90—137.

[4] А. Я. Дубовицкий и А. А. Милютин, Задачи на экстремум при наличии ограничений, ЖВМ и МФ 5:3 (1965), 395—453.

Поступило в редакцию 25 мая 1970 г.