Доклады Академии наук СССР
1963. Том 149, № 4

МАТЕМАТИКА

А. Я. ДУБОВИЦКИЙ, А. А. МИЛЮТИН

ЗАДАЧИ НА ЭКСТРЕМУМ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 22 X 1962)

В заметке дается новый подход к задачам вариационного исчисления. При этом оказывается, что также «неклассические» задачи, как задачи оптимального регулирования, могут быть исследованы теми же методами, которыми исследуются «классические» задачи. Мы рассматриваем такие необходимые условия экстремума, которые можно получить с помощью первой вариации. В «классическом» случае эти условия естественно приводят к уравнению Эйлера.

Дадим краткое описание предлагаемого метода. Положим, что в некотором полном нормированном пространстве W задан функционал $F(w)$. Требуется найти минимум $F(w)$ при условии, что на w наложено некоторое конечное число ограничений. Будем различать ограничения типа неравенств и ограничения типа равенств. Каждое ограничение типа неравенств есть замыкание открытого в W множества. Будем считать также, что ограничения типа равенств выделяют некоторое «гладкое» многообразие в пространстве W. Ясно, что каждая точка w, удовлетворяющая всем ограничениям, содержится в пересечении этих множеств.

Пусть w^0 — точка минимума функционала F, удовлетворяющая всем ограничениям. Мы скажем, что $\bar{w} \in W$ — запрещенная вариация, если $\frac{d}{d\varepsilon} F(w^0 + \varepsilon\bar{w})|_{\varepsilon=0} = F'(w^0, \bar{w}) < 0$. Мы всегда будем предполагать, что $F'(w^0, \bar{w})$ непрерывно зависит от $\bar{w}$.

Рассмотрим теперь одно из ограничений типа неравенств. Вариацию $\bar{w}$ назовем допустимой по данному ограничению, если $w^0 + \varepsilon\bar{w}$ удовлетворяет ему при всех достаточно малых ε. Равным образом вариация $\bar{w}$ считается допустимой по ограничениям типа равенств, если прямая $w^0 + t\bar{w}$ касается выделенного многообразия в точке w^0. Очевидно, что как запрещенные вариации, так и вариации, допустимые по различным ограничениям, образуют конические множества в пространстве W. В этой заметке мы предполагаем, что:

1. Запрещенные вариации, а также допустимые вариации по ограничениям типа неравенств образуют выпуклые конуса с внутренними точками.

2. Вариации, допустимые по ограничениям типа равенств, образуют некоторое подпространство L. При весьма общих предположениях на функционал F можно утверждать, что необходимым условием минимума в W^0 является отсутствие общих точек у открытых частей всех допустимых конусов, конуса запрещенных вариаций и у подпространства L. Однако для получения содержательного критерия нужно сформулировать это условие в терминах линейных функционалов; последнее ясно хотя бы из того обстоятельства, что все ограничения «в малом» записываются при помощи линейных неравенств и информация об этих неравенствах должна войти в необходимые условия минимума.

Таким образом возникает следующая задача: дана конечная система открытых выпуклых конусов $\Omega_1, \ldots, \Omega_s$ и подпространство L.

Требуется найти необходимое и достаточное условие в терминах двойственных пространств того, что перечисление $\Omega_1 \ldots \Omega_s \cdot L = 0$. Эта задача имеет следующее решение. Назовем Ω_i^* совокупность линейных функционалов, неотрицательных на Ω_i, и L^* — совокупность линейных функционалов, исчезающих на L.

Теорема. *Для того чтобы* $\Omega_1 \ldots \Omega_s \cdot L = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали линейные функционалы* $w_1, \ldots, w_s$, l, $w_i \in \Omega_i^*$, $l \in L^*$ *не равные нулю одновременно и такие, что*

$$w_1 + \ldots + w_s + l = 0. \tag{1}$$

Отметим, что условие (1) играет ту же роль, что и уравнение Эйлера, и в «классическом» случае совпадает с ним.

Примеры.

1. Уравнение Эйлера. Пусть $I(x) = \int\limits_0^1 f(t, x, \dot{x})\, dt$. Требуется найти условия минимума функционала I, если $x(0) = x_0$ и $x(1) = x_1$. Переформулируем задачу следующим образом: в пространстве пар непрерывных функций $x(t)$, $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, дан функционал $I(x, u) = \int\limits_0^1 f(t, x, u)\, dt$. Найти необходимые условия минимума $I(x, u)$ при ограничениях $x = x_0 + \int\limits_1^t u\, dt$, $x(1) = x_1$.

Пусть $x^0(t)$, $u^0(t)$ — точка минимума функционала I, удовлетворяющая всем ограничениям. Конус запрещенных вариаций Ω состоит из тех $\bar{x}, \bar{u}$, для которых $I'(x^0, u^0; \bar{x}, \bar{y}) = \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \bar{x} + \frac{\partial f}{\partial u} \bar{u}\right) dt < 0$.

Ограничения типа равенств приводят к подпространству $L\bar{x} = \int\limits_0^t \bar{u}\, dt$, $\bar{x}(1) = 0$. Поскольку I' — линейный функционал от $\bar{x}, \bar{u}$, то $\omega(\bar{x}, \bar{u}) = -\alpha I'$, где ω — произвольный элемент из Ω^*. Известно, что любой линейный функционал в пространстве непрерывных функций можно записать в виде интеграла Стильтьеса: $l(\varphi) = \int\limits_0^1 \varphi(t)\, d\mu(t)$, где $\mu(t)$ — некоторая мера. Используя это обстоятельство, любой линейный функционал $l \in L^*$ можно представить в виде $\int\limits_0^1 \left(\bar{x} - \int\limits_0^t \bar{u}\, d\tau\right) d\mu(t) + c\bar{x}(1) = l(\bar{x}, \bar{u})$. Условие (1) приводит, следовательно, к равенству

$$-\alpha \int \left(\frac{\partial f}{\partial x} \bar{x} + \frac{\partial f}{\partial u} \bar{u}\right) dt + \int \left(\bar{x} - \int\limits_0^t \bar{u}\, d\tau\right) d\mu(t) + c\bar{x}(1) = 0$$

и к неравенству $\alpha > 0$. Подчеркнем, что равенство должно выполняться тождественно по $\bar{x}, \bar{u}$. Приравнивая члены с $\bar{x}$ и $\bar{u}$ отдельно, получим:

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial u} - \alpha \int\limits_1^t \frac{\partial f}{\partial x}\, dt - c = 0.$$

2. Принцип максимума Л. С. Понтрягина.

1) На решениях системы

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x, u) \tag{2}$$

задан функционал $I(x, u)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(x, u)\,dt$. Среди всех $x(t)$, $u(t)$, удовлетворяющих (2) и таких, что $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$, найти такие, на которых I принимает наименьшее значение. Моменты времени t_0 и t_1 не фиксируются. Значения $u(t)$ принадлежат некоторому множеству D из E^r. f и Φ непрерывно дифференцируемы по x и непрерывны по u. В этой задаче речь идет о необходимых условиях сильного экстремума, т. е. используется следующее понятие близости. Последовательность $u_n(t)$ стремится к $u(t)$, если $|u_n(t)|$ равномерно ограничены и сходятся к $u(t)$ по мере.

Прежде всего отметим, что проводить непосредственное варьирование в такой топологии весьма неудобно в силу ее «недифференцируемости». Например, пусть $u(t, \varepsilon)=e^{-t^2/\varepsilon^2}$, $0\leqslant t\leqslant 1$. Очевидно, $u(t, \varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ в данной топологии. Однако $u(t, \varepsilon)$ нельзя представить в виде $u(t, \varepsilon)=\varepsilon\bar{u}(t)+o(\varepsilon)$. В силу последнего обстоятельства рассматриваемую задачу нельзя исследовать классическими методами вариационного исчисления.

Поэтому естественным оказывается следующий прием. Любую функцию $u(t)$ можно записать в виде $u(\tau_v(t))$, где $u(\tau)$ — некоторая функция, а τ и t связаны соотношением $dt/d\tau=v(\tau)$ $(v\geqslant 0)$. Очевидно, $u(\tau)$ однозначно определена там, где $v(\tau)\neq 0$, и может быть произвольно задана, где $v(\tau)=0$.

Рассмотрим $u(t, \varepsilon)=u(\tau_{v+\varepsilon\bar{v}}(t))$, $v+\varepsilon\bar{v}\geqslant 0$ при $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$. Тогда при $\varepsilon\to 0$ $u(t, \varepsilon)-u(t)$ стремится к нулю в указанном выше смысле. Важно, что $v(\tau, \varepsilon)=v+\varepsilon\bar{v}\to v(\tau)$ дифференцируемым по ε образом, в то время как $u(t, \varepsilon)\to u(t)$, как правило, недифференцируемым образом. Отсюда вытекает, что для сохранения аппарата вариационного исчисления надо варьировать $v(\tau)$, причем возникает естественное ограничение $v(\tau)\geqslant 0$.

2) Эквивалентная формулировка задачи пункта 1), удобная для варьирования. Пусть $u^0(t)$ — оптимальное управление; t_0, t_1 — время его действия и $x^0(t)$ — решение системы (2). Пусть, далее, $v_0(\tau)$ — некоторая неотрицательная на (0, 1) функция $\left(\int\limits_0^1 v^0(\tau)\,d\tau=t_1-t_0\right)$. Положим $dt/d\tau=v_0(\tau)$. Примем, далее, $u^0(\tau)=u^0(t(\tau))$, $x^0(\tau)=x^0\,t(\tau))$. Пусть, наконец, $\widetilde{u^0}(\tau)$ совпадает с $u^0(\tau)$ там, где $v^0(\tau)\neq 0$ и задана некоторым образом на множестве нулей $v^0(\tau)$.

Задача формулируется следующим образом: среди всех $x(\tau)$, $v(\tau)$, удовлетворяющих системе

$$dx/d\tau=vf(x, \widetilde{u^0}),$$

найти такие, на которых функционал $I(x, v)=\int\limits_0^1 v\Phi(x, \widetilde{u^0})\,d\tau$ достигает минимума. На x и v наложены следующие ограничения: $x(0)=x_0$, $x(1)=x_1$ и $v\geqslant 0$. Ясно, что $v^0(\tau)$, $x^0(\tau)$ является решением этой задачи. Исследование задачи согласно изложенному в начале методу приводит к принципу максимума Л. С. Понтрягина.

3) Задача о минимаксе. В той же постановке, что и в пункте 1), требуется минимизировать функционал $I(x, u)=\max\limits_{t_0\leqslant t\leqslant t_1}\Phi(x)$. Преобразуя задачу аналогично пункту 2) и затем исследуя ее согласно предлагаемому методу получаем: пусть a — произвольное решение системы

$$-\frac{da}{dt}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^* a, \tag{3}$$

где $\partial f/\partial x$ берется на оптимальных $x(t)$, $u(t)$, а $(\partial f/\partial x)^*$ есть транспонированная к ней матрица. $\widetilde{a}_{t'}(t)$ удовлетворяет системе (3) при $t \leqslant t'$ и равно нулю для $t > t'$; $\widetilde{a}_{t'}(t') = \Phi'(x(t'))$, μ — некоторая мера, заданная на (t_0, t_1); $\psi_\mu(t) = \int \widetilde{a}_{t'}\, d\mu(t')$; M — множество точек t, где $\Phi(x(t))$ достигает своего наибольшего значения.

Теорема (принцип максимума). *Пусть $u^0(t)$ — оптимальное управление, $x^0(t)$ — соответствующее решение. Существуют $a(t)$ и такая неотрицательная мера μ, сосредоточенная на M, не равные одновременно нулю, что*:

$$(a(t) + \psi_\mu(t),\ f(x^0(t),\ u)) \geqslant 0, \quad (a,\ f) = \sum_1^n a_i f_i$$

при всех $u \in D$;

$$(a(t) + \psi_\mu(t),\ f(x^0(t),\ u^0(t))) = 0$$

при всех (или почти всех, что зависит от класса допустимых $u(t)$) значениях $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

3. Неравенство С. Н. Бернштейна. В пространстве многочленов n-й степени задан функционал $F(p) = \max\limits_{-\infty<x<\infty} |p'/s'|$, где s — многочлен n-й степени с корнями, лежащими под вещественной осью. Требуется найти $\max F(p)$ при условии $|p/s| \leqslant 1$, $-\infty < x < \infty$. Пусть p_0 — решение задачи. Варьирование ограничения типа неравенств приводит к выпуклому конусу Ω таких $\bar{p}$, для которых $\operatorname{Re} \bar{p}/p_0 < 0$, $x \in M$, где M — множество точек вещественной оси, на котором $|p_0/s| = 1$.

Непосредственное вычисление дает $F'(p_0, \bar{p}) = F(p) \max\limits_{x \in M_1} \operatorname{Re} \bar{p}_1'/p_0$, где на M_1 отношение p_0'/s' достигает максимума. Конус K запрещенных вариаций состоит из $\bar{p}$, для которых $F' > 0$. В рассматриваемом случае конус запрещенных вариаций не выпуклый. Поэтому условие (1) непосредственно нельзя применять.

Необходимое условие экстремума в этом случае можно сформулировать так: каково бы ни было полупространство $\pi \subset K$, имеет место $\pi \cdot \Omega = 0$.

Если положить $K = \bigcup \pi$, то $-(cK)^* = \bigcup \pi^*$. Поэтому из условия (1) следует: для любого функционала $\omega_1 \in (cK)^*$ найдется такой функционал $\omega \in \Omega^*$, что

$$\omega_1 = \omega. \tag{4}$$

Воспользовавшись общим видом линейного функционала в пространстве непрерывных функций, заключаем, что для любой неотрицательной сосредоточенной на M_1 меры μ_1 найдется такая неотрицательная и сосредоточенная на M мера μ, что $\int \frac{\bar{p}'}{p_0'}\, d\mu_1 = \int \frac{\bar{p}}{p_0}\, d\mu$ для любого многочлена $\bar{p}$ степени n. Анализ последнего приводит к неравенству $|p_0'| \leqslant |s'|$.

В заключение авторы выражают благодарность проф. А. Я. Повзнеру за внимание к работе.

Институт химической физики
Академии наук СССР

Поступило
13 X 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, гл. I, II, ИЛ, 1959. [2] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, М., 1961. [3] С. Н. Бернштейн, Собр. соч., 1, Изд. АН СССР, 1952.